הרצאה 11: מסלולים קלים ביותר בגרף מכוון

מרצה: אורי שטמר

Textbook: Cormen, Leiserson, Rivest, Stein. Introduction to Algorithms.

תזכורות

בעיית המסלולים הקלים ביותר עם מקור יחיד:

קלט: גרף $G = (V, E)$ מכוון ופונקציית משקל $w: E \to \mathbb{R}$ וצומת $s \in V$ (צומת זה נקרא "המקור")

יש למצוא: לכל $v \in V$ מסלול קל ביותר מ- s ל- v

בשלב ראשון: לכל קודקוד $v \in V$ נמצא משקל מסלול קל ביותר מ- s ל- v (סימנו כ- $\delta(s, v)$)

דיברנו על אלגוריתם גנרי לבעיה:

לכל קודקוד $v \in V$ נתחזק משתנה $dist(v)$

הגדרנו פרוצדורת $\text{Relax}(u, v)$

אם $(u, v) \in E$ וגם $dist(v) > dist(u) + w(u, v)$ אזי

$dist(v) \leftarrow dist(u) + w(u, v)$

האלגוריתם הגנרי

אתחול: $dist(s) = 0$ ו- $dist(v) = \infty$ לכל $v \in V \setminus \{s\}$

צעד: כל עוד קיימת קשת $(u, v) \in E$ כך ש- $dist(v) > dist(u) + w(u, v)$,
בחר קשת (u, v) כנ"ל ובצע $\text{Relax}(u, v)$

טענות שהוכחנו לגבי האלגוריתם הגנרי:

(1) בכל שלב בריצה, אם $dist(v) \neq \infty$ אזי קיים מסלול מ- s ל- v בגרף שמשקלו $dist(v)$
(2) בכל שלב בריצה $\delta(s, v) \leq dist(v)$
(3) אם האלגוריתם עוצר אזי לכל $v \in V$ מתקיים $d(v) = \delta(s, v)$

* הבעייה שלנו עם האלגוריתם הזה הייתה שהוא עלול לרוץ בזמן אקספוננציאלי. עכשיו אנחנו רוצים להפוך אותו לאלגוריתם יעיל על ידי כך שבכל שלב נבחר את הקשת (u, v) שנבצע עליה Relax בצורה יותר חכמה.

האלגוריתם של Dijkstra עבור גרפים עם משקולות אי-שליליים: $w(e) \geq 0$ לכל $e \in E$

הרעיון: בכל שלב נבחר צומת עם $dist(v)$ מינימלי נבדוק אם אפשר לעדכן את השכנים שלו, ויותר לא נעדכן את v

למה שזה יעבוד? נראה שבכל שלב הצומת הבא עם $dist(v)$ מינימלי כבר מכיל את הערך הנכון $\delta(s,v)$

אתחול: $S \leftarrow \emptyset$ (לאורך הריצה, S תהייה קבוצת הצמתים שכבר "טיפלנו" בהם ועבורם $(dist(v) = \delta(s,v)$)
$dist(s) = 0$
לכל $v \neq s$ בצע $dist(v) = \infty$

צעד: כל עוד $|S| < |V|$
- בחר צומת $v \notin S$ עם $dist(v)$ מינימלי
- $S \leftarrow S \cup \{v\}$
- לכל צומת $x \notin S$ שכן של u, כלומר $(v,x) \in E$, בצע $\text{Relax}(v,x)$

שימו לב שהאלגוריתם הזה הוא מקרה פרטי של האלגוריתם הגנרי שראינו קודם, כי שם אמרנו שצריך לבצע Relax עבור קשת כלשהי וכאן אנחנו בוחרים קשתות באופן יותר ספציפי

האינטואיציה: ברגע שמצאנו את הצומת v עם $dist(v)$ מינימלי, אז אף קודקוד אחר לא יכול לעזור לו...

הוכחת נכונות

משפט: בסוף הריצה $dist(v) = \delta(s,v)$ לכל $v \in V$

לצורך הוכחת המשפט, נשתמש בסימונים הבאים:

סימון: עבור $0 \leq i < n$ נסמן ב- z_i את הקודקוד שנכנס ל- S באיטרציה ה- i של האלגוריתם. בפרט, $z_0 = s$.

סימון: עבור $0 \leq i < n$ נסמן ב- D_i את הערך של $dist(z_i)$ ברגע שבו z_i נכנס ל- S. בפרט, $D_0 = 0$.

כלומר, D_i הוא הערך של $dist$ של הקודקוד ה- i שנכנס ל- S (ברגע הכניסה ל- S)

טענת עזר 1: $D_1 \leq D_2 \leq D_3 \leq \cdots \leq D_n$

הוכחת טענת עזר 1:
יהי $1 \leq i < n$. נראה כי $D_i \leq D_{i+1}$.

נסתכל על תחילת האיטרציה ה- i של האלגוריתם (זוהי האיטרציה בה הכנסנו את z_i ל- S).
ברגע זה, מכיוון שהאלגוריתם בחר בצומת z_i מתקיים:
$$D_i = dist(z_i) \leq dist(z_{i+1})$$

נשים לב כי גם אם במהלך האיטרציה ה- i אנחנו מעדכנים את הערך של $dist(z_{i+1})$, אזי לאחר העדכון

$$dist(z_{i+1}) = dist(z_i) + w(z_i, z_{i+1}) \geq dist(z_i) = D_i$$

(כאשר אי השיוויון האחרון נובע מההנחה שהמשקולות בגרף אי-שליליים)

כלומר, בכל מקרה, <u>בסיום</u> האיטרציה ה- i, ולכן גם <u>בתחילת האיטרציה ה- $(i+1)$</u> מתקים

$$D_i = dist(z_i) \leq dist(z_{i+1}) = D_{i+1}$$

כאשר השיוויון האחרון הוא לפי הגדרת D_{i+1}.

מ.ש.ל. (טענת עזר 1)

<u>טענת עזר 2:</u> בסיום הריצה אין שום Relax אפשרי

<u>הוכחת טענת עזר 2:</u>
נסתכל על קשת (u, v).

<u>מקרה א:</u> אם u נכנס ל- S <u>לפני</u> v אז כשהכנסנו את u ל- S ביצענו Relax(u, v).
לאחר ביצוע פעולת Relax זו התקיים

$$dist(v) \leq dist(u) + w(u, v)$$

ולאחר מכן $dist(v)$ יכול רק לקטון במהלך הריצה (והערך של $dist(u)$ לא משתנה יותר).
לכן גם בסיום הריצה מתקיים

$$dist(v) \leq dist(u) + w(u, v)$$

ולכן בסיום הריצה לא ניתן לבצע Relax על הקשת (u, v).

<u>מקרה ב:</u> אם u נכנס ל- S <u>אחרי</u> v אז, לפי טענת עזר 1, בסיום הריצה מתקיים

$$dist(v) \leq dist(u)$$

ובפרט (מכיוון שהמשקולות אי-שליליים)

$$dist(v) \leq dist(u) + w(u, v)$$

ולכן בסיום הריצה לא ניתן לבצע Relax על הקשת (u, v).

<u>הוכחת המשפט:</u>
לפי טענת עזר 2, בסיום הריצה אין שום Relax אפשרי.
זהו תנאי העצירה של האלגוריתם הגנרי (והאלגוריתם של Dijkstra הוא מקרה פרטי).
לכן, כפי שהוכחנו בשיעור שעבר, בסיום הריצה לכל $v \in V$ מתקיים $dist(v) = \delta(s, v)$.
מ.ש.ל.

<u>זמן ריצה של האלג' של Dijkstra</u>

נחזיק את ערכי $dist(\cdot)$ בערימת מינימום. מכיוון שערכי $dist(\cdot)$ יכולים רק <u>לקטון</u> נשתמש בערימת פיבונאצ'י.

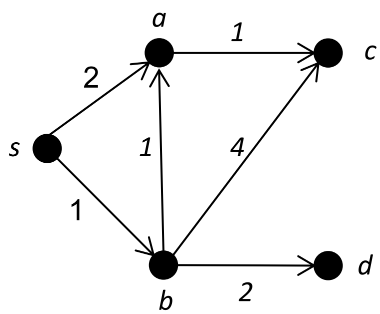
- באתחול, הערימה מכילה כל קודקוד ב- V כאשר $dist(s) = 0$ וכאשר $dist(v) = \infty$ לכל $v \neq s$. הוספת איבר בודד לערימה מתבצעת בזמן $O(1)$ (ניתוח פחת) ולכן האתחול כולו מתבצע בזמן $O(|V|)$.
- נבצע $|V|$ פעולות ExtractMin, כל אחת בזמן $O(\log|V|)$
- נבצע לכל היותר $|E|$ פעולות DecreaseKey המתרחשות אחרי פעולת Relax בה משתנה ערך $dist(\cdot)$. כל פעולת DecreaseKey מתבצעת בזמן $O(1)$ (ניתוח פחת) ולכן כל פעולות ה DecreaseKey ביחד מתבצעות בזמן $O(|E|)$.

סה"כ זמן ריצה $O(|E| + |V| \cdot \log|V|)$.

עץ מסלולים

עד עכשיו ראינו איך למצוא משקל של מסלול קל ביותר לכל קודקוד. במקור רצינו למצוא ממש מסלולים...

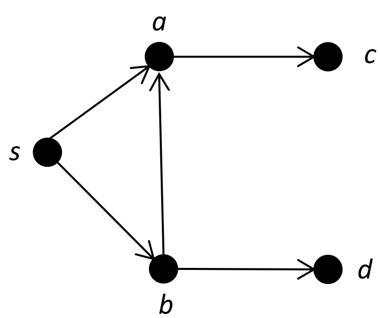
נסתכל על דוגמה:



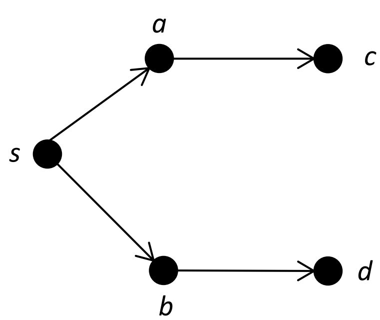
מסלולים קלים ביותר מ- s בדוגמה זו:

* עבור s: המסלול שמכיל רק את s
* עבור b: המסלול (s,b)
* עבור d: המסלול (s,b,d)
* עבור c: ישנן 2 אפשרויות. ניקח (s,b,a,c)
* עבור a: גם כאן יש 2 אפשרויות ניקח (s,a)

נתבונן בצלעות "שלקחנו":

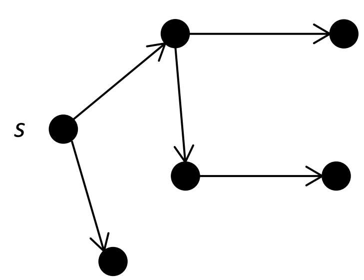


אבל אם עבור c היינו לוקחים את המסלול (s,a,c) במקום את (a,b,a,c) אז היינו מקבלים עץ מסלולים קלים ביותר:

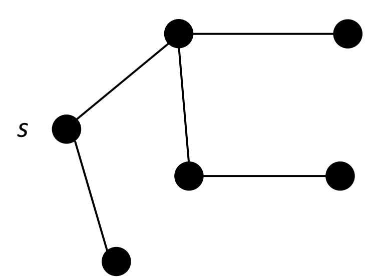


הגדרה 1: עץ מושרש T עם שורש s הוא גרף מכוון המקיים: אם נסמן ב- $\tilde{T}$ את הגרף T ללא כיוונים על הצלעות אזי $\tilde{T}$ הוא עץ (גרף קשיר חסר מעגלים) וגם לכל קודקוד v בגרף המסלול היחיד מ- s אליו ב- $\tilde{T}$ הוא מסלול מכוון ב- T.

T

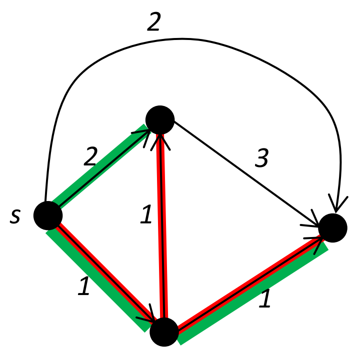


$\tilde{T}$



הגדרה 2: <u>עץ מסלולים זולים ביותר של גרף מכוון G מצומת s</u> הוא עץ מושרש T עם שורש s, כאשר לכל $v \in V$ המסלול מ- s ל- v ב- T הוא מסלול קל ביותר כלשהו מ- s ל- v ב- G.

לדוגמה, עבור הגרף הבא ישנן 2 אפשרויות לעצי מסלולים זולים ביותר:



באלגוריתמים שלנו, בנוסף לערך $dist(v)$ נחזיק לכל קודקוד v משתנה $\pi(v)$ שהוא הצומת לפני v במסלול מ- s ל- v במשקל $dist(v)$.

<u>**נשלים את הגדרת פעולת Relax:**</u>

$\mathbf{Relax}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$
if $(u,v) \in E$ and $dist(v) > dist(u) + w(u,v)$ then • $dist(v) \leftarrow dist(u) + w(u,v)$ • $\boldsymbol{\pi(v) \leftarrow u}$

<u>**נשלים את האלגוריתם הגנרי:**</u>

<u>**אתחול:**</u> $dist(s) = 0$ ולכל $v \neq s$ בצע $dist(v) = \infty$
לכל $v \in V$ בצע $\boldsymbol{\pi(v) = \mathbf{Null}}$

<u>**צעד:**</u> כל עוד קיימת קשת $E \ni (u,v)$ כך ש- $dist(v) > dist(u) + w(u,v)$,
בחר קשת (u,v) כנ"ל ובצע $\mathbf{Relax}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$

<u>**השלמת הוכחת נכונות האלגוריתם הגנרי:**</u>

<u>**משפט:**</u> יהי $G = (V,E)$ גרף מכוון ויהי $s \in V$ כך שלכל $v \in V$ קיים מסלול מ- s ל- v ב- G. אם האלגוריתם הגנרי עוצר בריצה על (G,s) אזי הגרף $\left(V,\{(\pi(v),v): v \in V \setminus \{s\}\}\right)$ הוא עץ מסלולים זולים ביותר של G מ- s.

<u>**טענת עזר:**</u> נתבונן ברגע מסוים בריצה בו פעולת $\mathrm{Relax}(u,v)$ <u>שינתה</u> את הערך $dist(v)$ ובנוסף לאחר השינוי $dist(v) = \delta(s,v)$. אזי ברגע זה גם מתקיים ש- $dist(u) = \delta(s,u)$.

<u>הוכחת טענת העזר:</u>

$$dist(u)+w(u,v) \quad = \quad dist(v) \quad = \quad \delta(s,v) \quad \le \quad \delta(s,u)+w(u,v)$$

כי פעולת Relax ביצעה עדכון

לפי ההנחה

כי $(u,v)\in E$ זה תמיד נכון כשקיימת קשת (טענת הקשת)

ולכן $dist(u)\le\delta(s,u)$ ולכן $dist(u)=\delta(s,u)$ כי $dist(u)$ לא יכול להיות קטן ממש מ- $\delta(s,u)$.

מ.ש.ל. (טענת העזר)

<u>סימון:</u> נסתכל על הגרף $T'=(V',E')$ הבא לאורך ריצת האלגוריתם:

$$V'=\{v\in V \ : \ dist(v)=\delta(s,v)\}$$
$$E'=\{(\pi(v),v) \ : \ v\in V'\setminus\{s\}\}$$

המשפט נובע מהטענה הבאה:

<u>טענה נשמרת:</u> נניח שהאלגוריתם הגנרי עצר. אז בכל רגע לאורך הריצה מתקיים שהגרף T' הוא עץ מושרש עם שורש s, ובנוסף, לכל $v\in V'$ מתקיים שהמסלול מ- s ל- v ב- T' הוא מסלול קל ביותר מ- s ל- v ב- G.

<u>רעיון ההוכחה:</u> באינדוקציה על $|V'|$

<u>בסיס:</u> $|V'|=1$, כלומר $V'=\{s\}$ וגם $E'=\emptyset$ והטענה נכונה.

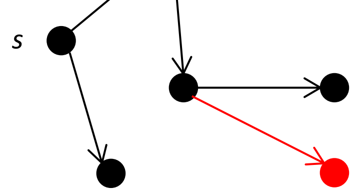
<u>הערה:</u> מדוע s הוא הקודקוד הראשון שנכנס ל- V'?
בתחילת הריצה $dist(s)=0$ ולכל קודקוד אחר $dist(v)=\infty$. אם $\delta(s,s)=0$ אז לפי הגדרה s הא הקודקוד הראשון שנכנס ל- V'. אחרת, אם $\delta(s,s)<0$ זאת אומרת שקיים מעגל שלילי ש- s הוא חלק ממנו, ולכן האלגוריתם הגנרי לא עוצר אף פעם (כי בכל רגע בריצה $dist(s)$ הוא מספר סופי ולכן לעולם לא יתקיים ש- $dist(s)=\delta(s,s)$ ולכן האלגוריתם לא עוצר לעולם).

<u>צעד:</u> יהי v הקודקוד הבא עבורו נקבע כי $dist(v)=\delta(s,v)$.
צ"ל כי הטענה מתקיימת עבור

$$\tilde{T}=(V'\cup\{v\}, \ \ E'\cup\{(\pi(v),v)\})$$

(א) **נראה ש- $\tilde{T}$ הוא עץ מושרש עם שורש s:**

מכיוון שעדכנו $dist(v)=\delta(s,v)$ לפי הצלע $(\pi(v),v)$, מטענת העזר נובע ש- $\pi(v)\in V'$.
כלומר בנינו את $\tilde{T}$ מתוך $T'=(V',E')$ על ידי זה שהוספנו קודקוד חדש וקשת מכוונת מקודקוד קיים לקודקוד החדש. ניתן להראות כי במקרה זה $\tilde{T}$ הוא עץ מושרש עם שורש s.



(ב) **נראה שהמסלולים בעץ $\tilde{T}$ הם קלים ביותר:**

מהנחת האינדוקציה יש להוכיח זאת רק עבור הקודקוד החדש v.
עבור כל $u \in V' \cup \{v\}$ נסמן ב- P_u את המסלול ב- $\tilde{T}$ מ- s ל- u.
עלינו להראות כי $w(P_v) = \delta(s,v)$.

נשים לב ש- P_v מורכב מהמסלול ב- $\tilde{T}$ מ- s ל- $\pi(v)$ בצירוף הקשת $(\pi(v),v)$. כלומר,
$P_v = P_{\pi(v)} \circ (\pi(v),v)$

מכיוון ש- $\pi(v) \in V'$, מהנחת האינדוקציה אנחנו יודעים ש- $w\left(P_{\pi(v)}\right) = \delta\left(s,\pi(v)\right)$. לכן

$$w(P_v) = \delta\left(s,\pi(v)\right) + w(\pi(v),v) \underset{\pi(v)\in V'}{=} dist\left(\pi(v)\right) + w(\pi(v),v) \underset{\substack{\text{פעולת Relax} \\ \text{ביצעה עדכון}}}{=} dist(v) \underset{\text{הנחה על } v}{=} \delta(s,v)$$

מ.ש.ל. (טענה נשמרת)

הוכחנו שהאלגוריתם הגנרי יוצר עץ מסלולים זולים ביותר מ- s (אם הוא עוצר). בפרט, Dijkstra יוצר עץ מסלולים קלים ביותר והוא <u>תמיד</u> עוצר.

<u>השלמת אלגוריתם Dijkstra:</u>

<u>אתחול:</u> $S \leftarrow \emptyset$
$dist(s) = 0$
לכל $s \neq v$ בצע $dist(v) = \infty$
לכל $v \in V$ בצע $\pi(v) = \text{Null}$

<u>צעד:</u> כל עוד $|S| < |V|$
- בחר צומת $v \notin S$ עם $dist(v)$ מינימלי
- $S \leftarrow S \cup \{v\}$
- לכל צומת $x \notin S$ שכן של u, כלומר $(v,x) \in E$, בצע $\mathbf{Relax}(v,x)$

<u>שאלה:</u> האם האלגוריתם של Dijkstra יעבוד גם כאשר יש משקולות שליליים?

<u>תשובה:</u> לא: