הרצאה 14: זרימה

Textbook: Cormen, Leiserson, Rivest, Stein. Introduction to Algorithms.

מרצה: אורי שטמר

תזכורות

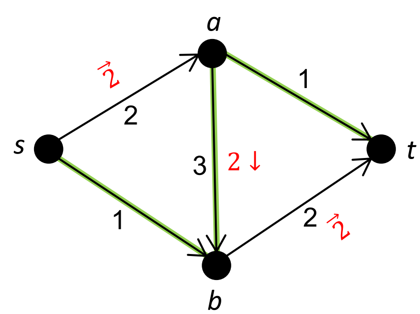
רשת זרימה: $N = \left(\underbrace{G=(V,E)}_{\text{גרף מכוון}} , \underbrace{c}_{\text{קיבולים}} , \underbrace{s}_{\text{מקור}} , \underbrace{t}_{\text{יעד}} \right)$

זרימה: פונקציה $f: V \times V \to \mathbb{R}$

- אילוצי קיבול: $f(u,v) \le c(u,v)$
- אנטי-סימטריות: $f(u,v) = -f(v,u)$
- שימור זרימה לכל $u \ne s,t$: $\sum_{v \in V} f(u,v) = 0$
- גודל הזרימה: $|f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$

מסלול שיפור: בהינתן רשת זרימה N ופונקצית זרימה f, מסלול שיפור הוא סדרה של קודקודים $s = v_0, v_1, \dots, v_\ell = t$ כך שלכל i מתקיים $0 < \Delta_i = c(v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1})$

דוגמה: בשחור – רשת זרימה, באדום – זרימה נוכחית, בירוק – מסלול שיפור



אלגוריתם F-F:

- התחל מזרימה חוקית $f(u,v) = 0$ לכל $u,v \in V$.
- כל עוד קיים מסלול שיפור, בצע:
  * מצא מסלול שיפור $P = (s = v_0, v_1, \dots, v_\ell = t)$
  * חשב $\Delta = \min_{0 \le i \le \ell-1} \{\Delta_i\} = \min_{0 \le i \le \ell-1} \{c(v_i, v_{i+1}) - f(v_i, v_{i+1})\}$
  * לכל $0 \le i \le \ell - 1$ בצע:

$$f(v_i, v_{i+1}) \leftarrow f(v_i, v_{i+1}) + \Delta$$
$$f(v_{i+1}, v_i) \leftarrow -f(v_i, v_{i+1})$$

לפני שנדבר על הנכונות של האלגוריתם הזה, איך יודעים אם קיים מסלול שיפור? ואיך מוצאים אחד כזה?

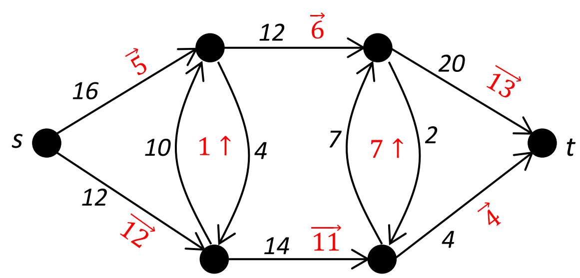
<u>הגדרה (רשת זרימה שיורית):</u>
בהינתן רשת זרימה $N = (G = (V, E), c, s, t)$ וזרימה f ברשת N, נגדיר את <u>רשת הזרימה השיורית</u> N_f באופן הבא:

$$N_f = \left(G_f = \left(V, E_f\right), c_f, s, t\right)$$

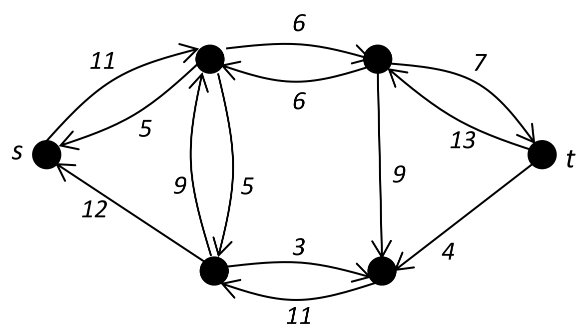
$$c_f(u, v) = c(v, v) - f(u, v)$$

$$E_f = \left\{\, (u, v) \in V \times V \;:\; c_f(u, v) > 0 \,\right\}$$

<u>דוגמה:</u>
בשחור – רשת זרימה N
באדום – זרימה f



רשת הזרימה השיורית כאן היא:



<u>אבחנה:</u> סדרת קודקודים היא <u>מסלול שיפור</u> ב- N יחסית לזרימה f אם ורק אם היא <u>מסלול</u> ב- N_f

(זאת אבחנה חשובה – כעת אנו מבינים שכדי למצוא <u>מסלול שיפור</u> אנו יכולים לחפש <u>מסלול</u> ברשת השיורית!)

<u>הערות:</u>

(1) הרשת השיורית N_f היא בעצמה רשת זרימה

(2) לכל $(u, v) \in V \times V$ מתקיים ש- $c_f(u, v) \geq 0$, אבל E_f מכילה רק זוגות (u, v) עבורם $c_f(u, v) > 0$

(3) $\begin{bmatrix} (u, v) \in E_f \\ \text{או} \\ (v, u) \in E_f \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} (u, v) \in E \\ \text{או} \\ (v, u) \in E \end{bmatrix}$

(4) לכן $|E| \leq 2 \cdot |E|$ וגם $\left|E_f\right| \leq 2 \cdot |E|$

הסבר:

$$|E| = \left|\left\{\, (u, v) : (u, v) \in E \,\right\}\right| \leq 2 \cdot \left|\left\{\, \{u, v\} : (u, v) \in E \,\right\}\right| \leq 2 \cdot \left|E_f\right|$$

ניסוח שקול של האלגוריתם של F-F

(1) התחל מזרימה $f(u,v)=0$ לכל u,v

(2) בנה את הרשת השיורית $N_f=\left(G_f=\left(V,E_f\right),c_f,s,t\right)$

(3) אם אין מסלול מ- s ל- t ב- G_f עצור והחזר את f.
אחרת מצא מסלול פשוט P מ- s ל- t ב- G_f.

(4) הגדר

$$c_f(P)=\min_{(u,v)\in P}\{\,c_f(u,v)\,\} \;=\min_{(u,v)\in P}\{\,c(u,v)-f(u,v)\,\}$$

(5) הגדר

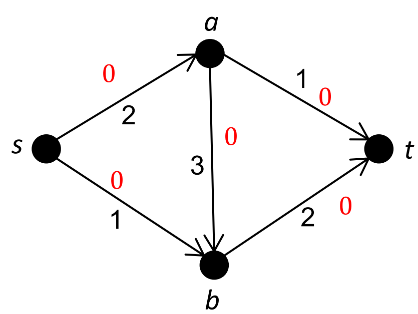
$$f(u,v)=\begin{cases} f(u,v)+c_f(P) & , \quad (u,v)\in P \\ f(u,v)-c_f(P) & , \quad (v,u)\in P \\ f(u,v) & , \quad \text{else} \end{cases}$$

(6) לך ל- (2)

<u>דוגמת ריצה:</u>

נתחיל מרשת זרימה עם זרימה אפס:

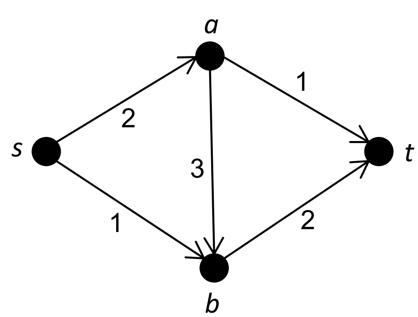
N:



נבנה את רשת הזרימה השיורית N_f

הקיבול של כל קשת ברשת השיורית זה הקיבול המקורי פחות הזרימה הנוכחית. לכן בשלב הראשון נקבל פשוט את הגרף המקורי:

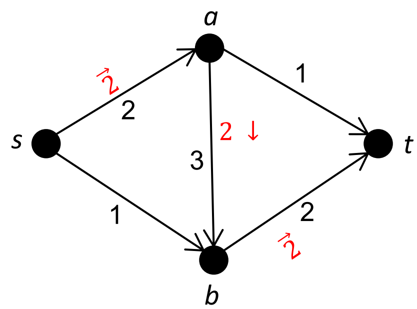
N_f: באיטרציה ה 1



עכשיו אנחנו צריכים לבחור <u>מסלול</u> ברשת השיורית (שהוא <u>מסלול שיפור</u> ברשת המקורית ביחס לזרימה הנוכחית). יש לנו כמה אפשרויות ונניח שבחרנו את המסלול *(s,a,b,t)*. במסלול הזה אנחנו יכולים להעביר 2 יחידות, כלומר $c_f(P)=2$.

הזרימה שנקבל (ברשת <u>המקורית</u>):

N:

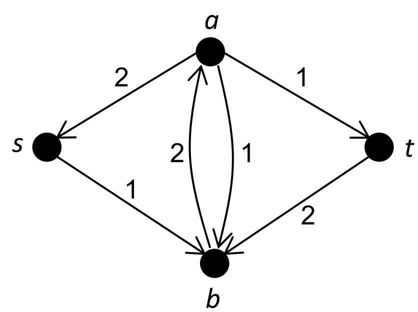


נבנה רשת שיורית:

מ- s ל- a אי אפשר להעביר יותר ולכן אין קשת. מ- a ל- s אנחנו יכולים להעביר 2 יחידות (להתחרט), ואמנם:

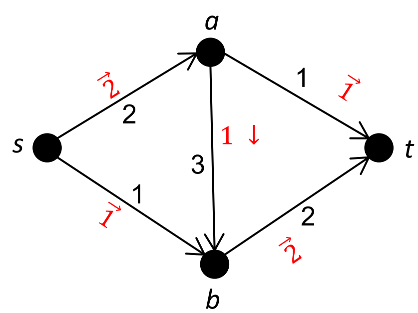
$$c_f(a,s) = c(a,s) - f(a,s) = 0 - (-2) - 2$$

N_f: באיטרציה ה 2



נקבל זרימה (ברשת <u>המקורית</u>):

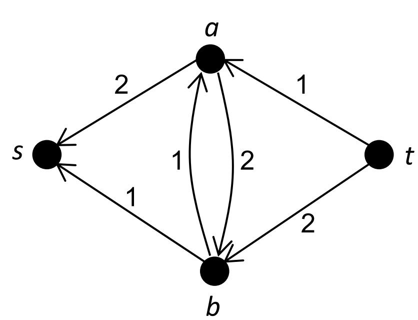
N:



האם יתכן שמ- s ל- t יעברו יור מ- 3 יחידות? לא, כי כל הקשתות שיוצאות מ- s "מלאות".

נבנה רשת שיורית:

N_f: באיטרציה ה 3



אכן קיבלנו שאין מסלול ברשת השיורית, והאלגוריתם יעצור.

הוכחת נכונות

<u>תוכן עניינים לקראת הוכחת הנכונות שנראה (כלומר, מה אנחנו הולכים לעשות):</u>

- נראה שבכל שלב f חוקית (באינדוקציה)
- נראה שאם האלגוריתם עוצר אז קיבלנו זרימת מקסימום
- נראה שאם כל הקיבולים שלמים אז האלגוריתם עוצר
- ניתוח זמן ריצה

<u>נתחיל מחוקיות f בכל שלב:</u>

<u>טענה 1</u>: תהי N רשת זרימה, תהי f זרימה חוקית ב- N, ותהי f' זרימה חוקית ב- N_f. נגדיר $g = f + f'$, כלומר

$$g(u,v) = f(u,v) + f'(u,v)$$

אזי g היא זרימה <u>חוקית</u> ב- N, שגודלה

$$|g| = |f| + |f'|$$

אינטואיציה לאיך נשתמש שטענה הזאת בהמשך: בשלב (5) של האלגוריתם של *F-F* אנחנו מוסיפים ל- f את $c_f(P)$. אז $C_f(P)$ יהיה לנו בתפקיד של f'.

<u>הוכחה:</u>

נראה קודם ש- g חוקית ברשת N:

<u>נבדוק אנטי סיטמריות:</u>

$$g(u,v) = f(u,v) + f'(u,v) = -f(v,u) - f'(v,u) = -g(v,u)$$

<u>נבדוק שימור זרימה:</u> עבור $u \neq s,t$ מתקיים

$$\sum_{v \in V} g(u,v) = \sum_{v \in V} \Big[f(u,v) + f'(u,v) \Big] = \left(\sum_{v \in V} f(u,v) \right) + \left(\sum_{v \in V} f'(u,v) \right) = 0$$

<u>נבדוק אילוצי קיבול:</u>

$$g(u,v) = f(u,v) + f'(u,v) \leq f(u,v) + c_f(u,v) = f(u,v) + \Big(c(u,v) - f(u,v) \Big) = c(u,v)$$

נראה את הדרישה לגבי גודל הזרימה:

$$|g| = \sum_{v \in V} g(s,v) = \sum_{v \in V} \Big[f(s,v) + f'(s,v) \Big] = \left(\sum_{v \in V} f(s,v) \right) + \left(\sum_{v \in V} f'(s,v) \right) = |f| + |f'|$$

מ.ש.ל. (טענה 1)

<u>מסקנה (טענה נשמרת):</u>

- בכל שלב באלכוריתם של *F-F* מתקיים ש- f היא זרימה <u>חוקית</u>
- בכל שלב, הזרימה גדלה ב- $C_f(P)$

<u>סקיצת הוכחת המסקנה:</u> באינדורציה על מספר האיטרציות שהאלגוריתם מבצע.

<u>בסיס:</u> $f \equiv 0$ זרימה חוקית.

<u>צעד:</u> נניח f חוקית ונגדיר

$$f'(u,v) = \begin{cases} c_f(P) & , \quad (u,v) \in P \\ -c_f(P) & , \quad (v,u) \in P \\ 0 & , \quad \text{else} \end{cases}$$

כאשר P הוא מסלול השיפור שנבחר באיטרציה הנוכחית וכאשר $c_f(P) = \min_{(u,v)\in P}\{c_f(u,v)\}$

מתקיים ש- f' היא זרימה חוקית ברשת השיורית N_f (כדי להראות את זה צריך לבדוק את 3 הדרישות...)

(מקיימת אילוצי קיבול לפי הגדרת $c_f(P)$, מקיימת אנטי-סימטריות לפי הגדרת f', מקיימת שימור זרימה כי לכל צומת במסלול P יש קשת שנכנסת אליו וקשת שיוצאת ממנו עם אותה כמות, ולכל צומת שלא במסלול לא נכנס כלום ולא יוצא כלום)

הזרימה אחרי האיטרציה היא $f + f'$.

לפי טענה 1, זוהי זרימה חוקית ברשת N, שגודלה הוא

$$|f| + |f'| = |f| + c_f(P)$$

מ.ש.ל.

אז עד עכשיו אנחנו יודעים שהאלגוריתם של *F-F* מתחזק זכימה <u>חוקית</u> f לאורך כל הריצה ואנחנו יודעים שבכל שלב הזרימה גדלה (ממש) ב- $c_f(P)$.

למה $c_f(P) > 0$?

כי N_f מכילה רק צלעות e עבורם $c_f(e) > 0$...

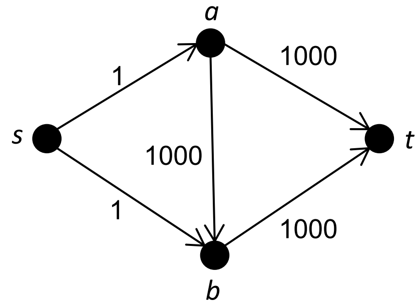
<u>איך מוכיחים ש- *F-F* מוצא זרימת מקסימום?</u>

- נראה חסם עליון על גודל <u>כל</u> זרימה חוקית אפשרית
- נראה שבסוף הריצה, גודל הזרימה המתקבלת שווה לחסם העליון

מאיפה נסיק חסם עליון כזה?

<u>דוגמאות לחסמים:</u>

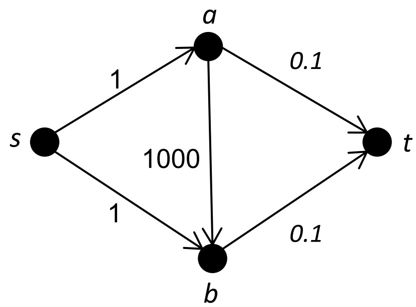
נתבונן ברשת הבאה:



כלומר $\sum_{v\in V} c(s,v)$ חסם עליון.

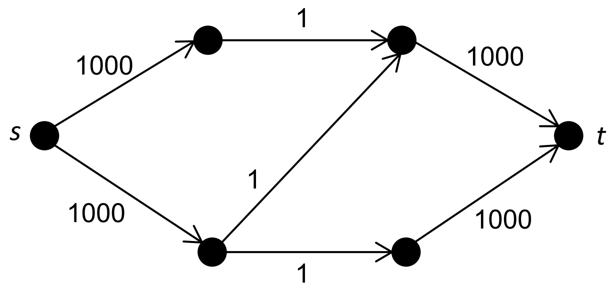
האם זה חסם עליון הדוק?

נתבונן ברשת הבאה:



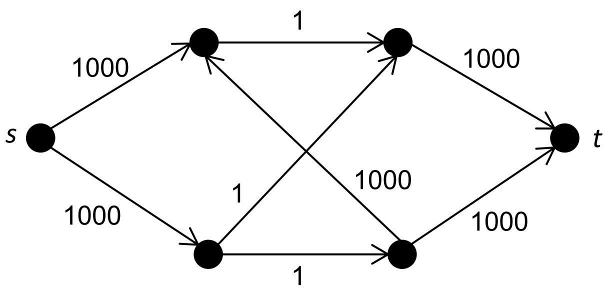
כלומר גם $\sum_{v \in V} c(v,t)$ חסם עליון

עוד דוגמה:



אפשר להעביר לכל היותר 3 יחידות מ- s ל- t.

ננסה לסבך את זה קצת – נוסיף קשת בכיוון ההפוך:



עדיין אפשר להעביר לכל היותר 3 יחידות מ- s ל- t

<u>הגדרה:</u> <u>חתך</u> ברשת $N=(G=(V,E),c,s,t)$ הוא זוג קבוצות S,T כך שמתקיים

- $S \cap T = \emptyset$
- $S \cup T = V$
- $s \in S$ ו- $t \in T$

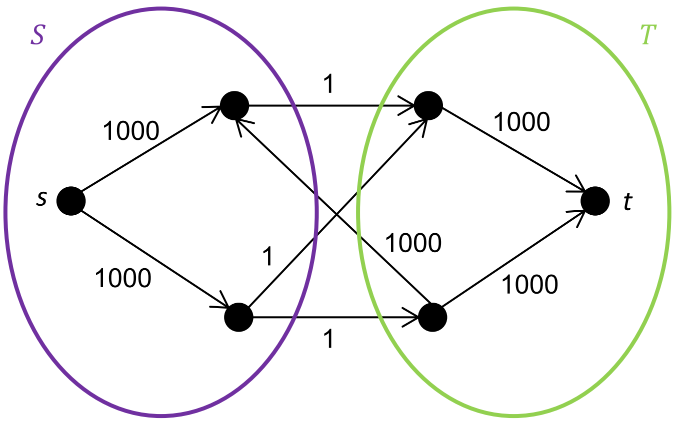
<u>הגדרה:</u> קיבול של חתך (S,T) זה סכום של כל קיבולי הקשתות שעוברות מהצד של S לצד של T:

$$c(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c(u,v)$$

(שימו לב: כאן (u,v) זה זוג סדור שבו $u \in S$ בצד הראשון ו- $v \in T$ בצד השני)

<u>האינטואיציה:</u> כל חתך מגדיר לנו איזשהו חסם עליון על גודל זרימה חוקית ברשת. המינימום בין כל החסמים האלה יהיה חסם הדוק.

דוגמה:



קיבול החתך הוא 3

<u>הגדרה:</u> <u>חתך מינימום</u> הוא חתך (S_0,T_0) כך שלכל חתך (S,T) מתקיים

$$c(S_0,T_0) \le c(S,T)$$

<u>אינטואיציה – לאן ההוכחה הולכת?</u> (נתסכל שוב בתוכן העניינים שהצהרנו עליו קודם...)

- נראה שלכל חתך (S,T) ולכל זרימה חוקית f מתקיים $|f| \le c(S,T)$
- בפרט, כל זרימה חוקית f מקיימת $|f| \le c(S_0,T_0)$
- נראה שבסוף הריצה מתקבלת זרימה f כך ש- $|f| = c(S_0,T_0)$ ולכן f זרימת מקסימום.

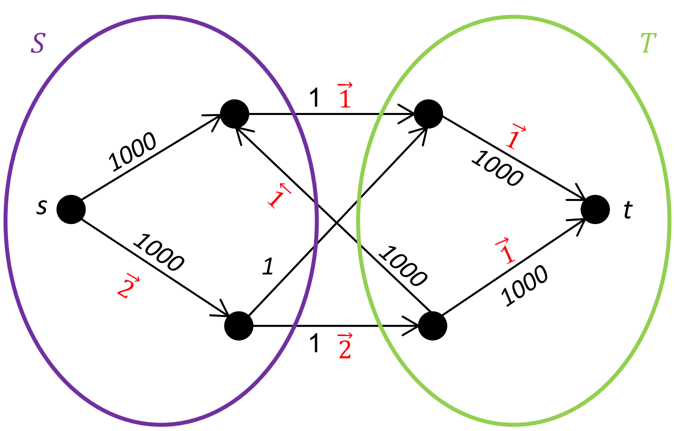
אבל לזה נגיע רק בפעם הבאה. היום רק נוכיח טענות עזר שנשתמש בהם בפעם הבאה.

<u>הגדרה:</u> תהי N רשת זרימה, תהי f זרימה ברשת, ויהי (S,T) חתך ברשת. <u>הזרימה בחתך</u> מוגדרת כ-

$$f(S,T) = \sum_{\substack{u\in S \\ v\in T}} f(u,v)$$

(בגלל האנטי-סימטריות נקבל ש- $f(S,T)$ זה סך הזרימה החיובית העוברת מ- S ל- T פחות סך הזרימה החיובית העוברת מ- T ל- S)

<u>דוגמה:</u>



קיבול החתך הוא 3
הזרימה בחתך היא 2

<u>טענה 2:</u> לכל קבוצה $S \subseteq V$ ולכל זרימה חוקית f מתקיים:

$$\sum_{\substack{u \in S \\ v \in S}} f(u,v) = 0$$

בגלל שאנחנו סוכמים על כל הקבוצה, אז אנחנו לוקחים כל זוג קודקודים פעמיים: פעם (u,v) ופעם (v,u) ולכן בגלל אנטי-סימטריות נקבל אפס.

<u>הוכחה:</u>

$$\sum_{u,v \in S} f(u,v) = \frac{1}{2} \cdot \sum_{u,v \in S} f(u,v) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{u,v \in S} f(u,v)$$

u,v הם סתם אינדקסים רצים...

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{u,v \in S} f(u,v) + \frac{1}{2} \cdot \sum_{u,v \in S} f(v,u)$$

לכן, מאנטי סימטריות נקבל

$$= \frac{1}{2} \cdot \sum_{u,v \in S} f(u,v) - \frac{1}{2} \cdot \sum_{u,v \in S} f(u,v) = 0$$

מ.ש.ל. (טענה 2)

<u>טענה 3:</u> לכל חתך (S,T) ולכל זרימה חוקית f מתקיים:

$$f(S,T) = |f| = \sum_{v \in V} f(s,v)$$

כלומר, לכל חתך – הזרימה בחתך שווה לגודל הזרימה $|f|$.

<u>הוכחה:</u>

$$f(S,T) = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} f(u,v)$$

במקום לעבור כאן רק על $v \in T$, נעבור על כל $v \in V$ ונחסר את האיברים שהוספנו:

$$= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in V}} f(u,v) - \sum_{\substack{u \in S \\ v \in V \setminus T = S}} f(u,v)$$

כעת, לפי טענה 2, הסכום השני הוא אפס ולכן

$$= \sum_{\substack{u \in S \\ v \in V}} f(u,v)$$

$$= \sum_{u \in S} \sum_{v \in V} f(u,v) = \sum_{v \in V} f(s,v) + \sum_{u \in S \setminus \{s\}} \underbrace{\left[\sum_{v \in V} f(u,v) \right]}_{\substack{\text{שווה אפס} \\ \text{לפי שימור זרימה}}} = \sum_{v \in V} f(s,v) = |f|$$

מ.ש.ל. (טענה 3)

<u>טענה 4:</u> לכל חתך (S,T) ולכל זרימה חוקית f מתקיים:

$$f(S,T) \leq c(S,T)$$

<u>הוכחה:</u>

$$f(S,T) = \sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} f(u,v) \leq \sum_{\substack{u\in S\\ v\in T}} c(u,v) = c(S,T)$$

מ.ש.ל. (טענה 4)