הרצאה 19: תכנון ליניארי

מרצה: אורי שטמר

Source: Lecture notes by Eden Chlamtáč

תזכורות:

מופע: גרף דו-צדדי $G=(U,V,E)$ ופונק' משקל על הצמתים $w:(U\cup V)\to\mathbb{R}^+$

פתרון חוקי: כיסוי בצמתים. כלומר, קבוצת צמתים $S\subseteq(U\cup V)$ כך שלכל קשת $(u,v)\in E$ מתקיים $u\in S$ או $v\in S$ (או שניהם).

יש למצוא: כיסוי בצמתים S במשקל $w(S)=\sum_{u\in S}w(u)$ קטן ביותר

בהינתן קלט (G,w) לבעייה הנ"ל, ראינו את התוכנית הלינארית הבאה והוכחנו שהערך שלה שווה למשקל כיסוי צמתים מינימלי עבור (G,w):

תוכנית B	
$\min \sum_{u\in(U\cup V)} w(u)\cdot z_u$	
$s.t.\quad z_u+z_v\geq 1$	$\forall\,(u,v)\in E$
$z_u\geq 0$	$\forall\,u\in(U\cup V)$
$-z_u\geq -1$	$\forall\,u\in(U\cup V)$

הגדרה: לכל אוסף מקדמים $\{c_j : j=1,\dots,n\}$, $\{b_i : i=1,2,\dots,m\}$, $\left\{a_{ij} : \begin{matrix} i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n\end{matrix}\right\}$,
שתי התוכניות הלינאריות הבאות נקראות דואליות אחת לשניה (כל אחת מהתוכניות היא דואלית לשניה):

MIN		**MAX**	
$\min \sum_{i=1}^{m} b_i\cdot y_i$		$\max \sum_{j=1}^{n} c_j\cdot x_j$	
$\text{s.t.} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\cdot y_i\geq c_j$	$\forall\, j=1,\dots,n$	$\text{s.t.} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot x_j\leq b_i$	$\forall\, i=1,\dots,m$
$y_i\geq 0$	$\forall\, i=1,\dots,m$	$x_j\geq 0$	$\forall\, j=1,\dots,n$

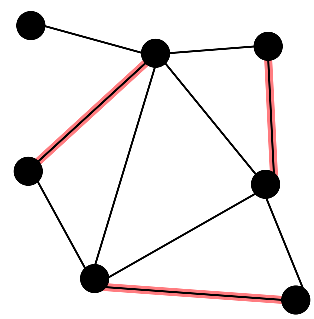
משפט (דואליות חזקה): אם שתי התוכניות הנ"ל פיזביליות (יש לשתיהן פתרונות חוקיים), אזי מתקיים
$$MAX=MIN$$

תזכורת נוספת:

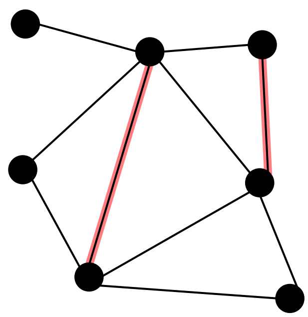
הגדרה: בהינתן גרף G עם קבוצת צלעות E, שידוך בגרף הוא אוסף של קשתות $T \subseteq E$, כך שאין שתי קשתות ב-T שנוגעות בצומת משותף. כלומר, לכל $(u_1,u_2),(u_3,u_4) \in T$ מתקיים ש- u_1,u_2,u_3,u_4 שונים זה מזה.

דוגמאות:

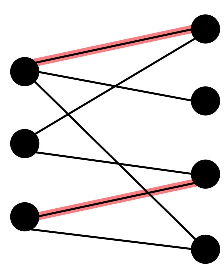
שידוך בגודל 3



שידוך בגודל 2

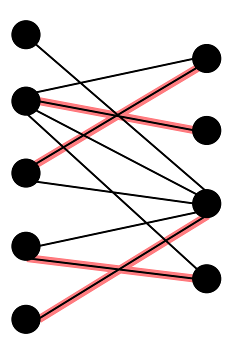


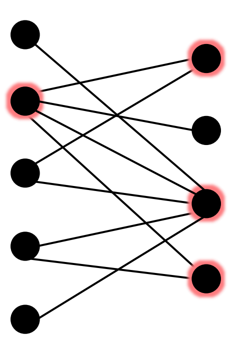
שידוך בגרף דו-צדדי:



משפט קניג (Kőnig): בכל גרף דו-צדדי $G=(U,V,E)$ גודל כיסוי צמתים מינימלי שווה לגודל שידוך מקסימלי.

למשל, בגרף הדו-צדדי הבא, גודל שידוך מקסימלי הוא 4 וגודל כיסוי צמתים מינימלי הוא 4:





היום נראה הוכחה של משפט קניג בעזרת דואליות (ישנן גם הוכחות אחרות).

נחזור לתוכנית שראינו בשתי ההרצאות הקודמות לבעיית כיסוי צמתים ממושקל בגרף דו-צדדי:

תוכנית B			
min	$\sum_{u\in(U\cup V)} w(u)\cdot z_u$		(1)
$s.t.$	$z_u+z_v\geq 1$	$\forall\ (u,v)\in E$	(2)
	$z_u\geq 0$	$\forall\ u\in(U\cup V)$	(3)
	$-z_u\geq -1$	$\forall\ u\in(U\cup V)$	(4)

בהרצאה הקודמת הוכחנו שלכל קלט $G=(U,V,E),w$ לבעיית כיסוי צמתים ממושקל בגרף דו-צדדי, אם משקל כיסוי מינימלי בגרף הוא OPT, אז הערך האופטימלי של התוכנית הנ"ל הוא גם OPT.

כעת נפשט את תוכנית B ע"י ויתור על האילוץ האחרון. נקבל את התוכנית הלינארית הבאה:

תוכנית C			
min	$\sum_{u\in(U\cup V)} w(u)\cdot y_u$		(5)
$s.t.$	$y_u+y_v\geq 1$	$\forall\ (u,v)\in E$	(6)
	$y_u\geq 0$	$\forall\ u\in(U\cup V)$	(7)

מכיוון שכל השמה חוקית (ובפרט השמה אופטימלית) למשתני (z_u) בתוכנית B היא השמה חוקית עם אותו ערך למשתני (y_u) בתוכנית C, נקבל באופן מיידי את התכונה הבאה:

<u>**אבחנה:**</u> הערך האופטימלי של תוכנית C הוא <u>לכל היותר</u> הערך האופטימלי של תוכנית B

מצד שני, מתקיים גם אי-שוויון בכיוון ההפוך:

<u>**טענה:**</u> הערך האופטימלי של תוכנית B הוא <u>לכל היותר</u> הערך האופטימלי של תוכנית C

<u>**מסקנה:**</u> לשתי התוכניות הלינאריות יש את אותו ערך אופטימלי, והוא משקל מינימלי של כיסוי בצמתים ממושקל עבור הקלט $G=(U,V,E),w$.

<u>**הוכחת הטענה:**</u>
יהי $(\hat{y}_u)_{u\in U\cup V}$ פתרון אופטימלי לתוכנית C. נגדיר את ההשמה הבאה לתוכנית B:

$$\hat{z}_u=\min\{\hat{y}_u\ ,\ \ 1\}$$

נשים לב כי השמה זאת מקיימת את אילוץ (4) באופן מיידי (לפי הגדרה) ובנוסף מקיימת את אילוץ (3) כי ההשמה $(\hat{y}_u)$ מקיימת את אילוץ (7).

לגבי אילוץ (2), לכל קשת (u,v), אם $\hat{y}_u, \hat{y}_v < 1$, אז לפי הגדרה מתקיים $\hat{z}_u + \hat{z}_v = \hat{y}_u + \hat{y}_v \geq 1$, כאשר אי-השוויון נובע כי $(\hat{y}_u)$ פתרון חוקי לתוכנית C ומקיים את אילוץ (6). אחרת, בה"כ $\hat{y}_u \geq 1$ ואז $\hat{z}_u = 1$ ומכיוון שכבר ראינו ש- $\hat{z}_v \geq 0$, מקיים כי $\hat{z}_u + \hat{z}_v \geq 1 + 0 = 1$.

כלומר, $(\hat{z}_u)$ היא השמה חוקית לתוכנית B.

נסמן ב- OPT_2 את האופטימום של תוכנית C. מהאופטימליות של $(\hat{y}_u)$ מתקיים

$$OPT_2 = \sum_{u \in U \cup V} w(u) \cdot \hat{y}_u \geq \sum_{u \in U \cup V} w(u) \cdot \hat{z}_u \geq OPT$$

כאשר אי-השוויון השמאלי נובע כי לכל צומת u מתקיים

$$\hat{z}_u = \min\{\hat{y}_u \ , \ 1\} \leq \hat{y}_u$$

וכאשר אי-השוויון הימני נובע מכך ש- $(\hat{z}_u)$ הוא פתרון <u>חוקי</u> לתוכנית B ולכן הערך האופטימלי קטן שווה מהערך של $(\hat{z}_u)$.

מ.ש.ל. (טענה)

כעת נרצה לבנות את התוכנית הדואלית לתוכנית C. לפי כללי הדואליות, התוכנית הדואלית תהייה תוכנית מקבימיזציה. האינדקסים של האילוצים בתוכנית C (לא כולל אילוצי סימן) הם בעצם הקשתות E. לכן בתוכנית הדואלית לכל קשת $e \in E$ יהיה משתנה אי-שלילי x_e. את פונקציית המטרה ניתן לקבל מהקבועים בצד ימין של האילוצים, שכולם 1. לכן פונקציית המטרה תהייה:

$$\max \ \sum_{e \in E} 1 \cdot x_e$$

מה לגבי האילוצים? כרגיל, אנחנו יודעים שיהיו אילוצי סימן

$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E$$

בנוסף, בתוכנית C יש משתנה לכל קודקוד $u \in U \cup V$. לכן בתוכנית הדואלית יהיה אילוץ לכל קודקוד u. לפי כללי הדואליות, זה יהיה אילוץ מסוג קטן-שווה, ואת הקבוע בצד ימין של האילוץ אפשר להעתיק מפונקציית המטרה בפוכנית המקורים. כלומר האילוץ עבור קודקוד u (בתוכנית הדואלית) יהיה מהצורה

$$\sum_{e \in E} ?? \cdot x_e \leq w(u)$$

אבל מה יהיו המקדמים בצד שמאל? כדי להבין זאת, צריך להבין מה המקדמים באילוצים המקוריים. באילוץ (6), המקדמים למשתנים שלא מופיעים בסכום הם 0 והמקדמים למשתנים שכן מופיעים הם 1. כלומר, את אילוץ (2) מתוכנית C עבור הקשת $e = (u,v)$ אפשר לכתוב באופן שקול כך:

$$\sum_{u' \in U \cup V} a_{eu'} \cdot y_{u'} \geq 1$$

כאשר

$$a_{eu'} = \begin{cases} 1 & , \quad \text{קצה של } e \text{ } u' \\ 0 & , \quad \text{אחרת} \end{cases}$$

כעת, כדי ליצור את האילוץ הדואלי עבור צומת $u \in U \cup V$ נשתמש באותם המקדמים (בעמודה של המטריצה המקורית) ונקבל שהפונקציה הלינארית בצד שמאל של האילוץ תהייה

$$\sum_{e\in E} a_{eu}\cdot x_e = \sum_{\substack{e\in E\\ \text{קצה של } e \;u}} a_{eu}\cdot x_e + \sum_{\substack{e\in E\\ \text{לא קצה של } e \;u}} a_{eu}\cdot x_e = \sum_{\substack{e\in E\\ \text{קצה של } e \;u}} 1\cdot x_e + \sum_{\substack{e\in E\\ \text{לא קצה של } e \;u}} 0\cdot x_e$$

$$= \sum_{\substack{e\in E\\ \text{קצה של } e \;u}} x_e = \sum_{\substack{e\in E\\ \text{חלה ב } e \;u}} x_e$$

לסיכום, קיבלנו את התוכנית הבאה (שהיא דואלית לתוכנית C)

תוכנית D		
$\max \quad \sum_{e\in E} x_e$		(8)
$s.t. \quad \sum_{\substack{e\in E\\ \text{חלה ב } e \;u}} x_e \le w(e)$	$\forall u \in U \cup V$	(9)
$x_e \ge 0$	$\forall\, e \in E$	(10)

לפי משפט דואליות חזקה, ולפי הקשר שהראינו בין תוכנית B לתוכנית C, ולפי הקשר שהראינו בשיעור שעבר בין תוכנית B לבעיית הכיסוי בצמתים מתקיים:

<u>**מסקנה:**</u> לכל גרף דו-צדדי $G=(U,V,E)$ עם פונקציית משקל w מתקיים:

$$\begin{bmatrix}\text{משקל כיסוי}\\ \text{צמתים מינימלי}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{ערך אופטימלי}\\ B \text{ לתוכנית}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{ערך אופטימלי}\\ C \text{ לתוכנית}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{ערך אופטימלי}\\ D \text{ לתוכנית}\end{bmatrix}$$

נתבונן עכשיו במקרה הפרטי שבו כל המשקלים הם $w(u)=1$. כלומר, במקרה זה, בבעיית כיסוי בצמתים נרצה למזער את <u>גודל</u> הכיסוי $\sum_{u\in S} 1 = |S|$.

במקרה זה, תוכנית D תהייה:

תוכנית D'		
$\max \quad \sum_{e\in E} x_e$		(11)
$s.t. \quad \sum_{\substack{e\in E\\ \text{חלה ב } e \;u}} x_e \le 1$	$\forall u \in U \cup V$	(12)
$x_e \ge 0$	$\forall\, e \in E$	(13)

נשים לב שבכל פתרון המקיים את אילוצים $(12),(13)$ מתקיים לכל קשת $e=(u,v)$:

$$1 \underbrace{\geq}_{\text{לפי (12)}} \sum_{\substack{e'\in E \\ \text{חלה ב } u \text{ } e'}} x_{e'} \underbrace{=}_{\substack{\text{כי גם } e \\ \text{חלה ב } u}} x_e + \sum_{\substack{e'\in E \\ \text{חלה ב } u \text{ } e' \\ e'\neq e}} x_{e'} \underbrace{\geq}_{\text{לפי (13)}} x_e + \sum_{\substack{e'\in E \\ \text{חלה ב } u \text{ } e' \\ e'\neq e}} 0 = x_e$$

כלומר, כל המשתנים יכולים לקבל ערכים רק בתחום $[0,1]$. כמו שראינו עבור התוכנית הלינראית לכיסוי צמתים ממושקל, גם כאן ניתן לראות (אבל לא נוכיח כאן) שתוכנית זו שקולי לתוכנית בשלמים:

<u>**משפט (שלא נוכיח):**</u> בכל גרף דו-צדדי $G=(U,V,E)$ לתוכנית D' $((11),(12),(13))$ יש פתרון אופטימלי שבו כל המשתנים מקבלים ערכים שלמים.

כלומר, הערך האופטימלי של תוכנית D' שווה לערך האופטימלי של התוכנית הבאה:

תוכנית E			
max	$\sum_{e\in E} x_e$		(14)
$s.t.$	$\sum_{\substack{e\in E \\ \text{חלה ב } u \text{ } e}} x_e \leq 1$	$\forall u \in U\cup V$	(15)
	$x_e \in \{0,1\}$	$\forall\ e \in E$	(16)

ננסה להבין את המשמעות הקומבינטורית של תוכנית E. מכיוון שבכל פתרון חוקי לתוכנית E המשתנים מקבלים ערך ב- $\{0,1\}$, אז ניתן לחשוב על פתרון לתוכנית E כפתרון שמייצג אינדיקטורים לקבוצת קשתות כלשהי. פונקציית המטרה $\sum_{e\in E} x_e$ בעצם מייצגת את גודל הקבוצה שהפיתרון מהווה אוסף אינדיקטורים שלה.

בהינתן פתרון לתוכנית E, נסמן ב- F את קבוצת הצלעות שמוגדרת על ידי הפיתרון.

ומה המשמעות הקומבינטורית של אילוץ (15)? ניקח צומת u כלשהו. אילוץ (15) אומר:

סכום האינדיקטורים של קשתות החלות ב- u הוא לכל היותר 1
כלומר
לכל היותר לאחת מהקשתות האלה יש אינדיקטור=1
כלומר
לכל היותר אחת מהקשתות האלה נמצאת ב- F

אם כן, פתרון הוא חוקי אם"ם לכל צומת, יש לכל היותר קשת אחת בפתרון שחלה באותו צומת. במילים אחרות, הקשתות זרות בצמתים, דהינו שידוך.

בתוכנית E אנחנו מחפשים פתרון חוקי (כלומר שידוך) שגודלו מקסימלי.

כלומק קיבלנו:

$$\begin{bmatrix}\text{גודל שידוך}\\ \text{מקסימלי}\\ \text{בגרף}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{ערך אופטימלי}\\ \text{לתוכנית } E\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{ערך אופטימלי}\\ \text{לתוכנית } D'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{ערך אופטימלי}\\ \text{לתוכנית } C\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{ערך אופטימלי}\\ \text{לתוכנית } B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{גודל כיסוי}\\ \text{צמתים מינימלי}\\ \text{בגרף דו צדדי}\\ \text{לא ממושקל}\end{bmatrix}$$

כלומר הוכחנו את משפט קניג!