תכנון אלגוריתמים		6.1.2021
	הרצאה 23: אלגוריתמי קירוב	
מרצה: אורי שטמר		*Source: Lecture notes by Michal Shemesh*

תזכורת

הגדרה:

אלגוריתם לבעיית מקסימיזציה (מינימיזציה) P ייקרא **אלגורים קירוב-α** אם מתקיימים התנאים הבאים:

1. זמן ריצת האלגוריתם פולינומי בגודל ייצוג הקלט.
2. בהינתן קלט x עבורו קיים פתרון אופטימלי y, האלגוריתם יחזיר פתרון חוקי z עם ערך $val(z)$ כך שמתקיים $val(z) \geq \alpha \cdot val(y)$ $(val(z) \leq \alpha \cdot val(y))$

בעיית כיסוי בקודקודים בגרף כללי לא ממושקל

<u>מופע:</u> גרף לא-מכוון $G = (V, E)$.

<u>פתרון חוקי:</u> תת קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל קשת $(u, v) \in E$ מתקיים כי $u \in C$ או $v \in C$ (או שניהם).

<u>יש למצוא:</u> פתרון חוקי C בגודל מינימום.

הערה: בפרק על תכנון ליניארי ראינו כי קיים פתרון פולינומי עבור הגרסה הממושקלת **<u>בגרף דו צדדי</u>**. ראינו גם את המקרה הפרטי בו המשקלים היו 1 ואז משקל הכיסוי ייצג את גודל הכיסוי. במקרה בו הגרף אינו דו צדדי אלא גרף כללי - לא ידוע אלגוריתם פולינומי. אנו מאמינים כי לא קיים כזה אלגוריתם ויתרה מכך, בעיה זו נחשבת לבעיה קשה שאם יימצא לה אלגוריתם פולינומי נוכל בעזרתו לפתור משפחה שלמה של בעיות קשות שלא ידוע עבורן אלגוריתם יעיל.

<u>אלגוריתם קירוב-2 לבעיית כיסוי בקודקודים</u>

1. אתחול: $C \leftarrow \emptyset$ (הפתרון הנבנה ע"י האלגוריתם)
2. כל עוד $E \neq \emptyset$ בצע:
   2.1. נבחר קשת כלשהי $(u, v) \in E$ ונבצע $C \leftarrow C \cup \{u, v\}$
   2.2. נסיר את הקודקודים u, v ואת כל הקשתות החלות בהם מן הגרף
3. נחזיר את C

טענה: אלגוריתם החמדן הוא אלגוריתם קירוב-2 לבעיית כיסוי בקודקודים.

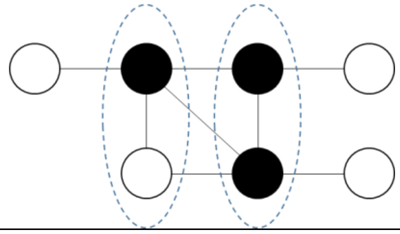
הוכחה: נתבונן בקבוצה C המוחזרת ע"י האלגוריתם.

- C היא כיסוי: בכל איטרציה, הקשתות המוסרות חלות בלפחות קודקוד אחד מתוך השניים שנוספו לפתרון C. כיוון שריצת האלגוריתם מסתיימת כאשר לא נותרו קשתות בגרף, מתקבל כי כל הקשתות כוסו בשלב כלשהו ולכן קבוצת הקודקודים C היא כיסוי בקודקודים של קשתות הגרף.
- קירוב-2:
  - נסמן ב-OPT גודל של כיסוי בקודקודים אופטימלי ב-G ונסמן ב-ALG את גודל הכיסוי C שהוחזר בסוף ריצת האלגוריתם. נסמן ב-F את קבוצת הקשתות אשר נבחרו ע"י האלגוריתם בשלב 2.1. מתאור האלגוריתם בצעד 2.2 נובע כי הצלעות ב-F זרות בקודקודים. בנוסף, כיוון שבכל פעם שנבחרת קשת מתווספים ל-C שני קודקודיה, מתקבל כי גודל הפתרון הנבנה הוא פי 2 מגודלה של F, כלומר $ALG = 2|F|$.

- ○ לכל כיסוי חוקי ולכל קבוצת קשתות מתקיים כי לכל קשת בקבוצה - לפחות אחד מהקודקודים בהם היא חלה - שייך לכיסוי (אחרת הכיסוי אינו חוקי). בפרט, דבר זה נכון עבור כיסוי אופטימלי כלשהו וקבוצת הקשתות F. כיוון שהקשתות F זרות בקודקודים, מספר הקודקודים הנדרשים כדי לכסותה הוא לפחות $|F|$ (כל קשת "תתרום" לפחות קודקוד אחד לכיסוי).

בציור:

קודקודי כיסוי אופטימאלי בגודל 3 צבועים בשחור.
קשתות F מסומנות בקווקוו. אחת מהן מכוסה ע"י קודקוד יחיד, והשניה ע"י שניים.



פתרון אופטימלי הוא בפרט פתרון חוקי ולכן מתקבל כי $|F| \leq OPT$.

- לסיכום: יחד מתקבל כי $ALG = 2|F| \leq 2 \cdot OPT$.

■

נראה כעת את הגרסה הממושקלת של בעיית הכיסוי:

בעיית כיסוי בקודקודים בגרף כללי במשקל מינימום

<u>מופע</u>: גרף לא-מכוון $G = (V, E)$ ופונקצית משקל $w: V \to \mathbb{R}^+$.
<u>פתרון חוקי</u>: תת קבוצה של קודקודים $C \subseteq V$ כך שלכל קשת $(u, v) \in E$ מתקיים כי $u \in C$ או $v \in C$ (או שניהם).
<u>יש למצוא</u>: פתרון חוקי C במשקל $w(C) = \sum_{v \in C} w(v)$ מינימום.

כעת נתאר אלגוריתם קירוב מבוסס תכנון ליניארי לבעיה הנ"ל, לפי תבנית שכבר ראינו בעבר. למעשה זה יהיה כלי מרכזי בפרק הנוכחי של תכנון אלגוריתמי קירוב:

1. א. נכתוב תוכנית בשלמים המייצגת את הבעיה שלנו עבור הקלט הנתון.
   ב. נבצע רילקסציה לתוכנית בשלמים ונקבל תוכנית ליניארית (מעל הממשיים) החוסמת את הערך האופטימאלי עבור הקלט.
2. נריץ על התוכנית הליניארית את אלגוריתם האליפסואיד (בזמן פולינומי) ונקבל פתרון אופטימאלי (שברי - עם ערכים לא שלמים) לתוכנית הליניארית.
3. על הפתרון השברי האופטימאלי, נריץ אלגוריתם עיגול (rounding algorithm) המחזיר פתרון שלם של חוקי לבעיה המקורית.

בפרק על תכנון ליניארי ראינו שימוש בתבנית זו עבור בעיית כיסוי בקודקודים במשקל מינימום בגרף דו-צדדי.

נתחיל עם השלב הראשון בתבנית. נכתוב תוכנית בשלמים המייצגת את הבעיה המקורית. אחר כך נראה תוכנית ליניארית מקבילה מעל הממשיים שערך האופטימום שלה שווה או טוב יותר מהאופטימום לבעיה המקורית.

מציאת חסם ע"י תוכנית ליניארית

תזכורת:
ראינו תוכנית בשלמים עבור הגרסה בה הגרף הוא דו-צדדי. באופן דומה, נבנה תוכנית בשלמים המתארת את הבעיה. ראשית, כיוון שהפתרון של הבעיה הקומבינטורית (בדידה) הנ"ל הוא קבוצה של קודקודים, לכל קודקוד נחשוב על הערכים 0 ו- 1 כעל ערכים המציינים האם קודקוד שייך לכיסוי או לא.
נגדיר לכל קודקוד $u \in V$ משתנה אינדיקטור x_u (משתנה שיכול לקבל ערכים מעל $\{0,1\}$).
נגדיר תוכנית בשלמים מעל המשתנים $(x_u)_{u\in V}$ ונחשוב על השמה חוקית עבורם (השמה שמקיימת את אילוצי התוכנית) כהשמה המגדירה כיסוי באופן הבא: $C = \{u \in V | x_u = 1\}$.

הערה:
הסימון $(x_u)_{u\in V}$ מייצג וקטור משתנים (בלי כובע).
הסימון $(\hat{x}_u)_{u\in V}$ מייצג פתרון ספציפי - השמה למשתנים (עם כובע).

תוכנית A:

$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{u\in V} w(u)x_u & & (1)\\
s.t. & x_u + x_v \geq 1 & \forall (u,v) \in E & (2)\\
 & -x_u \geq -1 & \forall\, u \in V & (3)\\
 & x_u \geq 0 & \forall\, u \in V & (4)\\
 & x_u \in \mathbb{Z} & \forall\, u \in V & (5)
\end{array}
$$

נסמן ב- OPT את האופטימום של תוכנית A.

** תוכנית זו אינה תוכנית ליניארית בגלל אילוץ (5), אילוץ השלמות.
אם נבצע רילקסציה לתוכנית זו נקבל תוכנית ליניארית מעל הממשיים בה כל משתנה יכול לקבל ערכים בתחום $[0,1]$. נסמנה כתוכנית B:

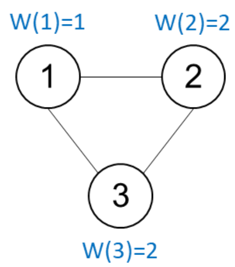
$$
\begin{array}{llll}
\min & \sum_{u\in V} w(u)z_u & & (6)\\
s.t. & z_u + z_v \geq 1 & \forall (u,v) \in E & (7)\\
 & -z_u \geq -1 & \forall\, u \in V & (8)\\
 & z_u \geq 0 & \forall\, u \in V & (9)
\end{array}
$$

נסמן ב- $FRAC$ את האופטימום של תוכנית B.

אבחנה 1: $FRAC \leq OPT$

(ראינו דברים דומים בפרק של תכנון לינארי...)

דוגמה:



נתבונן בגרף משולש

$G=(V,E), V=\{v_1,v_2,v_3\}, E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),(v_2,v_3)\}$

$w(v_1)=1, w(v_2)=2, w(v_3)=2$

כיסוי אופטימלי (לא יחיד) הוא $C=\{v_1,v_2\}$ במשקל 3.

נתבונן בפתרונות אפשריים לתוכניות הנ"ל:

פתרון בשלמים המקיים את (2)-(5) ומייצג את הפתרון C יהיה $(\hat{x}_1,\hat{x}_2,\hat{x}_3)=(1,1,0)$

פתרון שיברי המקיים את (7)-(9) יהיה $(\hat{z}_1,\hat{z}_2,\hat{z}_3)=(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$, עם ערך $1\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{3}{4}+2\cdot\frac{3}{4}=3.25$

פתרון שיברי נוסף המקיים את (7)-(9) יהיה $(\hat{z}_1,\hat{z}_2,\hat{z}_3)=(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$, עם ערך $1\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}=1.5$

פתרון זה הוא פתרון שיברי בעל ערך אופטימום ואכן מדגים את אבחנה 1.

אלגוריתם עיגול וניתוח הקירוב

אלגוריתם $round$

1. קלט: פתרון חוקי כלשהו $(\hat{z}_u)_{u\in V}$ המקיים את אילוצים (7)-(9)
2. נגדיר וקטור $(\hat{x}_u)_{u\in V}$ באופן הבא: $\forall u\in V, \hat{x}_u=\begin{cases}1, & \hat{z}_u\geq\frac{1}{2}\\ 0, & \text{אחרת}\end{cases}$
3. נחזיר את $(\hat{x}_u)_{u\in V}$.

הערה: זהו אלגוריתם דטרמיניסטי. אלגוריתם העיגול הקודם שראינו היה אקראי.

נחזור לדוגמה שלנו.

עבור הקלט $(\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{3}{4})$ אלגוריתם העיגול יחזיר פתרון $(0,1,1)$ במשקל 4.

עבור הקלט $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ אלגוריתם העיגול יחזיר פתרון $(1,1,1)$ במשקל 5.

טענה 2: בהינתן פתרון חוקי כלשהו $(\hat{z}_u)_{u\in V}$ המקיים את האילוצים (7)-(9) האלגוריתם $round$ מחזיר פתרון $(\hat{x}_u)_{u\in V}$ בשלמים המקיים את האילוצים (2)-(5) כך שמתקיים

$$\sum_{u\in V}w(u)\hat{x}_u\leq 2\cdot\sum_{u\in V}w(u)\hat{z}_u$$

הוכחה:

נביט בפתרון שברי $(\hat{z}_u)_{u\in V}$ כלשהו (לאו דוקא אופטימלי) המקיים את האילוצים (7)-(9).

<u>חוקיות הפתרון:</u>

- אילוצים (3)-(5): מהגדרת אלגוריתם העיגול, בשלב 2 ניתן לראות שכל משתנה מקבל ערך מתוך $\{0,1\}$.

- אילוץ (2): מכיוון שהפתרון הנתון $(\hat{z}_u)_{u\in V}$ מקיים את אילוץ (7) אז לכל קשת $(u,v)\in E$ $\hat{z}_u+\hat{z}_v\geq 1$ ולכן אחד משני המשתנים מוכרח להיות לפחות 1/2 (אחרת הסכום $\hat{z}_u+\hat{z}_v<1$). נניח ב.ה.כ כי $\hat{z}_u\geq\frac{1}{2}$. אז $\hat{x}_u=1$ ומכיוון ש- $\hat{x}_v\geq 0$ אזי $\hat{x}_u+\hat{x}_v\geq 1$ ⇐ אילוץ (2) מתקיים.

<u>קירוב-2:</u>

- נביט בשני הערכים האפשריים אותם יכול לקבל המשתנה $\hat{x}_u$ בשלב 2. אם $\hat{z}_u\geq\frac{1}{2}$ אז $\hat{x}_u=1$ ומתקיים $\hat{x}_u\leq 2\cdot\hat{z}_u$. אם $\hat{z}_u<\frac{1}{2}$ אז $\hat{x}_u=0$ וגם אז מתקיים $\hat{x}_u\leq 2\cdot\hat{z}_u$.
 מכאן נסיק כי <u>לכל</u> ערך $\hat{x}_u$ מתקיים $\hat{x}_u\leq 2\cdot\hat{z}_u$ ונקבל מיידית כי
$$\sum_{u\in V}w(u)\hat{x}_u\leq\sum_{u\in V}w(u)2\cdot\hat{z}_u=2\cdot\sum_{u\in V}w(u)\hat{z}_u$$

■

נראה כעת אלגוריתם קירוב מפורש המבוסס על התבנית שלנו.

אלגוריתם קירוב-2 מבוסס תכנון ליניארי לבעיית כיסוי בקודקודים בגרף כללי במשקל מינימום

1. בהנתן קלט $G=(V,E),w$ לבעיה נגדיר תוכנית ליניארית (תוכנית B) מעל המשתנים $(z_u)_{u\in V}$.
2. נריץ את אלגוריתם האליפסואיד ונקבל פתרון שיברי מעל הממשיים $(\hat{z}_u)_{u\in V}$ בעל ערך $FRAC$.
3. נריץ את האלגוריתם $round$ *על הקלט* $(\hat{z}_u)_{u\in V}$ ונקבל פתרון בשלמים $(\hat{x}_u)_{u\in V}$ מעל $\{0,1\}$.
4. נחזיר את הקבוצה $C=\{u\in V|\hat{x}_u=1\}$

הערה: הקבוצה C מוגדרת על פי וקטור משתני אינדיקטור $(\hat{x}_u)_{u\in V}$.

משפט: האלגוריתם הנ"ל מהווה אלגוריתם קירוב-2 לבעיית כיסוי בצמתים בגרף כללי במשקל מינימום.

הוכחה:
יהי $(\hat{z}_u)_{u\in V}$ פתרון אופטימלי בעל ערך $FRAC$ אשר התקבל מהרצת אלגוריתם האליפסואיד על התוכנית הליניארית (מעל הממשיים) בשלב 2 באלגוריתם.
בשלב 3 מתקבל פתרון בשלמים $(\hat{x}_u)_{u\in V}$ מעל $\{0,1\}$ המקיים לפי טענה 2
$$\sum_{u\in V}w(u)\hat{x}_u\leq 2\cdot\sum_{u\in V}w(u)\hat{z}_u$$
כיוון ש- $\sum_{u\in V}w(u)\hat{z}_u=FRAC$ נקבל יחד כי
$$\sum_{u\in V}w(u)\hat{x}_u\leq 2\cdot\sum_{u\in V}w(u)\hat{z}_u=2\cdot FRAC\leq 2\cdot OPT$$
כאשר אי-השיוויון האחרון נובע מאבחנה 1.
לכן בשלב 4 האלגוריתם מחזיר קבוצת צמתים C שמשקלה $w(C)=\sum_{u\in V}w(u)\hat{x}_u\leq 2\cdot OPT$.

■

דיון לגבי פער השלמות

אם לסכם את השלבים שביצענו אז אנחנו מקבלים

$$\mathrm{FRAC} \le \mathrm{OPT} \le \mathrm{ROUND} \le 2 \cdot \mathrm{FRAC} \le 2 \cdot \mathrm{OPT} \qquad ((1))$$

שימו לב כי אי-השוויונים האדומים נכונים באופן כללי לכל בעיית מינימיזציה, כי OPT מייצג פתרון טוב ביותר בשלמים ו-ROUND מייצג פתרון כלשהו בשלמים (את ערך הפתרון שאלגוריתם העיגול מחזיר).

אי-השוויון הירוק נקבע לפי ההפסד של אלגוריתם העיגול (במקרה שלנו, לקח פתרון שברי עם ערך k והחזיר פתרון בשלמים עם ערך 2k).

כלומר, אם אתם מתכננים אלג' קירוב בעזרת הסכימה הזאת, ואם אלגוריתם העיגול שלכם מפסיד פקטור α, אז תקבלו אלגוריתם עיגול-α לבעייה שלכם.

לפעמים נרצה להגיד טענות מהצורה:

"תכננתי אלג' קירוב-α לבעייה מסויימת, וזה הכי טוב שניתן להשיג בעזרת הסכימה שלנו"

איך נוכל להראות כזאת טענה? (נתרכז בבעיית מינימיזציה)

בעצם, במקרה כזה, מה שאנחנו רוצים להראות זה שלכל אלג' עיגול קיים מופע לבעייה עבורו

$$\frac{\mathrm{ROUND}}{\mathrm{FRAC}} \ge \alpha$$

אבל, כפי שראינו ב- $((1))$, בבעיית מינימיזציה מתקיים

$$\frac{\mathrm{ROUND}}{\mathrm{FRAC}} \ge \frac{\mathrm{OPT}}{\mathrm{FRAC}}$$

ולכן כדי להראות שמתקיים $\frac{\mathrm{ROUND}}{\mathrm{FRAC}} \ge \alpha$ מספיק להראות שקיים מופע לבעייה עבורו $\frac{\mathrm{OPT}}{\mathrm{FRAC}} \ge \alpha$.
זה נותן לנו חסם טבעי לקירוב שנוכל להשיג באמצעות הסכימה של תכנון לינארי ועיגול.
היתרון בלהסתכל על היחס $\frac{\mathrm{OPT}}{\mathrm{FRAC}}$ זה שהוא לא תלוי באלג' העיגול הספציפי שנעבוד איתו.

הגדרה: נגדיר את פער השלמות (Integrality Gap) להיות

$$\text{Integrality Gap} = \sup_{\text{קלטים}} \frac{\mathrm{OPT}}{\mathrm{FRAC}}$$

מסקנה: אם עבור בעייה מסויימת מתקיים $\text{Integrality Gap} = \alpha$ אז לא ניתן בעזרת הסכימה שלנו לקבל אלג' עם יחס קירוב יותר טוב מ- α.

הערה: במקרה האנלוגי של בעיית מקסימום, פער השלמות נלקח להיות האינפימום של היחס, כלומר,

$$\text{Integrality Gap} = \inf_{\text{קלטים}} \frac{\mathrm{OPT}}{\mathrm{FRAC}}$$

היום ראינו אלגוריתם קירוב-2 מבוסס תכנון ליניארי לבעיית כיסוי בקודקודים בגרף כללי במשקל מינימום. נראה שיחס הקירוב שהשגנו הוא הטוב ביותר האפשרי בעזרת הסכימה שלנו.

נחשוב על בעיית כיסוי בקודקודים של הקליקה K_n

אבחנה: כדי לכסות קליקה מהסוג הזה ברור כי נצטרך לפחות $n-1$ קודקודים. כי אם נוותר על שני קודקודים בפתרון אז הצלע ביניהם לא תכוסה. לכן $\mathrm{OPT}=n-1$.

לעומת זאת, אם נסתכל על התוכנית הלינארית שכתבנו לבעיית הכיסוי בקודקודים, פתרון אפשרי לה הוא כזה שכל משתנה $\hat{z}_u$ מקבל בפתרון את הערך חצי. כי בצורה בזאת ברור שאנחנו מספקים את כל אילוצי הצלעות שהרי תמיד מתקיים כי

$$\hat{z}_u+\hat{z}_v \geq 1$$

הערך של הפתרון הזה הוא בדיוק $n/2$, מה שאומר כי $\mathrm{FRAC} \leq n/2$. לכן נקבל כי פער השלמות הוא לפחות

$$\sup_n \frac{n-1}{n/2}=2$$

לכן לא נוכל להשיג בשיטה הזאת יחס קירוב טוב יותר מ-2, בדיוק זה שהשגנו.

הערה: מאמינים (תחת הנחות מסויימות בתאוריה של מדעי המחשב) שהקירוב הזה הוא למעשה הכי טוב שאפשר להשיג לבעייה הזאת (גם לא בדרך הסכימה שלנו...)