הרצאה 24: אלגוריתמי קירוב

מרצה: אורי שטמר
Source: Lecture notes by Eden Chlamtáč

היום נדבר על בעיה קלאסית שהיא הרחבה טבעית של בעיית כיסוי בצמתים.

בעיית קבוצה דוקרת (Hitting Set)

מופע: אוסף של n קבוצות $S_1, \dots, S_n \subseteq \{1, \dots, k\}$.

פתרון חוקי: קבוצת איברים $J \subseteq \{1, \dots, k\}$ כך שבכל קבוצה S_i בקלט יש לפחות איבר אחד $j \in S_i$ כך ש- $j \in J$. קבוצה כזו נקראת קבוצה דוקרת.

יש למצוא: פתרון חוקי J בגודל $|J|$ קטן ביותר.

הערות:

1. בעיית כיסוי בצמתים היא המקרה הפרטי של קבוצה דוקרת בו כל הקבוצות הן בגודל 2 בדיוק. (אז הקבוצות הן קשתות והאיברים הם צמתים).
2. מכך שכיסוי בצמתים היא בעיה קשה, ניתן להסיק שגם קבוצה דוקרת היא בעיה קשה, שכן כל אלגוריתם שיפתור את הבעיה היותר כללית קבוצה דוקרת יפתור גם את בעיית כיסוי בצמתים.
3. ניתן להרחיב גם את בעיית קבוצה דוקרת למקרה הממושקל בו יש פונקציית משקל על האיברים, ויש למצוא קבוצה דוקרת במשקל קטן ביותר. האלגוריתמים שנראה היום יעבדו גם עבור המקרה הזה, אך למען הפשטות, נתמקד רק בגרסאה הלא-ממושקלת.

בדומה לבעיית כיסוי בצמתים, ניתן לכתוב תכנית לינארית בשלמים טבעית המייצגת את בעיית קבוצה דוקרת:

$$\min \quad \sum_{j=1}^{k} x_j \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in S_i} x_j \geq 1 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} \tag{2}$$

$$0 \leq x_j \leq 1 \qquad \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{3}$$

$$x_j \in \mathbb{Z} \qquad \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{4}$$

שימו לב שזו בדיוק התכנית בשלמים שכתבנו עבור בעיית כיסוי בצמתים, כאשר באילוץ (2) אנחנו סוכמים על כל איברי הקבוצה (במקום כל (שני) קצוות הקשת).

טענה 0: השמה למשתני $\left(x_j\right)_{j=1}^{k}$ מקיימת את האילוצים (2-4) אם״ם היא השמה של אינדיקטורים של קבוצה דוקרת, ובמקרה זה הסכום ב- (1) מייצג את גודל הקבוצה. (הוכחה: תרגיל)

מסקנה: האופטימום של התכנית בשלמים (1-4) הוא בדיוק גודל פתרון אופטימלי לבעיית קבוצה דוקרת. כמקודם, נסמן ערך זה ב-OPT.

נזכיר שבגלל אילוץ (4), התכנית הנ״ל היא תכנית בשלמים, ולא תכנית לינארית רגילה, ולכן לא נוכל לפתור אותה בזמן פולינומי. לכן נוותר על אילוץ השלמות וננסח תכנית לינארית המרחיבה את התכנית הנ״ל.

$$\min \quad \sum_{j=1}^{k} y_j \tag{5}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j \in S_i} y_j \geq 1 \qquad \forall i \in \{1, \dots, n\} \tag{6}$$

$$0 \leq y_j \leq 1 \qquad \forall j \in \{1, \dots, k\} \tag{7}$$

נסמן את הערך האופטימלי של התכנית (5-7) ב-FRAC. באופן דומה לבעיות הקודמת, כל פתרון לתכנית בשלמים הוא גם פתרון חוקי לתכנית הלינארית המקבילה, ולכן מתקיים:

<u>טענה 1</u>: FRAC ≤ OPT. (הוכחה: תרגיל)

כפי שציינו, הבעייה בשלמים (בעיית קבוצה דוקרת) נחשבת לבעיה קשה, ולכן לא נצפה שניתן לפתור אותה ע״י תכנון לינארי. ואכן, באופן כללי, לא מתקיים שוויון בין שני הערכים הנ״ל. עם זאת, נראה אלגוריתם עיגול המקבל פתרון שברי לאילוצים (6-7), ומחזיר פתרון שלם חוקי שערכו גדול באופן חסום מערך הפתרון השברי. נראה תחילה חסם פשוט באמצעות אלגוריתם עיגול דומה להרצאה הקודמת.

לצורך חסם זה, נגדיר פרמטר המייצג את גודל הקבוצה הגדולה ביותר בקלט:

$$f = f(S_1, \dots, S_n) \coloneqq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |S_i|$$

אלגוריתם $\text{ROUND}\left(\left(\hat{y}_j\right)_{j=1}^{k}\right)$

<u>קלט</u>: פתרון חוקי $\left(\hat{y}_j\right)_{j=1}^{n}$ לאילוצים *(6-7)*

- לכל $j \in \{1, \dots, k\}$, נגדיר

$$\hat{x}_j \leftarrow \begin{cases} 1, & \hat{y}_j \geq 1/f \quad \text{אם} \\ 0, & \text{אחרת} \end{cases}$$

- נחזיר את הפתרון $\left(\hat{x}_j\right)_{j=1}^{n}$

ניתן להוכיח כי האלגוריתם מחזיר פתרון חוקי לתכנית בשלמים, וכי גודל הפתרון (גודל הקבוצה הדוקרת המוגדרת ע״י האינדיקטורים) לא עולה על $f \cdot \sum_{j=1}^{k} \hat{y}_j$. הוכחה זו דומה מאוד להוכחת הטענה המקבילה עבור אלגוריתם העיגול שראינו בהרצאה האחרונה, ולא נתעכב עליה. נציין שבאמצעות אלגוריתם זה, נקבל אלגוריתם קירוב-f לבעיית קבוצה דוקרת, המוגדר באופן הבא:

1. בהינתן קלט $S_1, \dots, S_n$ לבעיה, נכתוב את התכנית הלינארית (5-7) מעל המשתנים השבריים $\left(y_j\right)_{j=1}^{n}$.
2. נריץ את אלגוריתם האליפסואיד ונקבל פתרון שברי $\left(\hat{y}_j\right)_{j=1}^{n}$ בעל ערך אופטימלי FRAC.
3. נריץ את האלגוריתם ROUND על הקלט $\left(\hat{y}_j\right)_{j=1}^{n}$ ונקבל פתרון בשלמים $\left(\hat{x}_j\right)_{j=1}^{n}$.
4. נחזיר את הקבוצה שקיבלנו מהאינדיקטורים הנ״ל (כלומר, את $\{j \in \{1, \dots, k\} \mid \hat{x}_j = 1\}$).

הוכחת נכונות האלגוריתם וטיב הקירוב דומה לאלגוריתם האחרון, ונשאיר אותה כתרגיל.

כעת נראה איך לקבל קירוב יותר טוב באמצעות אלגוריתם עיגול אחר. בדומה לאלגוריתם הראשון שראינו בנושא תכנון לינארי, אלגוריתם זה יהיה *אלגוריתם מקרי*. לפני שנתאר את האלגוריתם, נציין את תכונותיו ונבין איך הוא מסייע לנו למצוא קירוב טוב לבעיית קבוצה דוקרת.

<u>טענה 2</u>: קיים קבוע $C > 0$ ואלגוריתם מקרי פולינומי המקבל השמה חוקית $\left(\hat{y}_j\right)_{j=1}^{k}$ לאילוצים (6,7), ובהסתברות לפחות $\frac{3}{4}$ מחזיר קבוצה דוקרת (מקרית) J^* בגודל

$$|J^*| \leq C \log n \cdot \sum_{j=1}^{k} \hat{y}_j$$

<u>הערה</u>: את האי-שיוויון הנ״ל ואת קיום האילוצים (6,7) ניתן לבדוק בקלות. לכן נוכל להניח בה״כ שבמידה והאלגוריתם לא מוצא פתרון כנ״ל (בהסתברות לכל היותר $\frac{1}{4}$), הוא יכריז שהוא נכשל בניסיון ולא יחזיר פתרון שאינו מקיים את התנאים. כאן אנחנו חוסמים את טיב הפתרון לא רק בתוחלת אלא בהסתברות גבוהה. נשים לב שהטענה לא דורשת שהקלט לאלגוריתם העיגול יהיה אופטימלי, אלא רק חוקי.

באמצעות אלגוריתם זה, ניתן לנסח את אלגוריתם הקירוב הבא:

1. בהינתן קלט $S_1, \ldots, S_n$ לבעיה, נכתוב את התכנית הלינארית (5-7) מעל המשתנים השבריים $\left(y_j\right)_{j=1}^{n}$.
2. נריץ את אלגוריתם האליפסואיד ונקבל פתרון שברי $\left(\hat{y}_j\right)_{j=1}^{n}$ בעל ערך אופטימלי FRAC.
3. נריץ את האלגוריתם המוזכר בטענה 2 על הקלט $\left(\hat{y}_j\right)_{j=1}^{n}$ ונחזיר את תוצאתו.

<u>משפט</u>: האלגוריתם הנ״ל הוא אלגוריתם קירוב-$O(\log n)$ לבעיית קבוצה דוקרת המצליח בהסתברות לפחות $\frac{3}{4}$ (לכל קלט).

<u>הוכחה</u>:
לפי טענה 2, במידה ואלגוריתם העיגול בצעד 3 מצליח, נקבל קבוצה דוקרת חוקית בגודל

$$|J^*| \leq C \log n \cdot \sum_{j=1}^{k} \hat{y}_j = C \log n \cdot \mathrm{FRAC} \leq C \log n \cdot \mathrm{OPT}$$

כאשר השיוויון האמצעי אינו הבטחה של אלגוריתם העיגול, אלא תוצאה של ריצת האליפסואיד בצעד 2. יתר על כן, והאי-שיוויון הימני נובע מטענה 1. מטענה 2, כל זה יקרה בהסתברות לפחות $\frac{3}{4}$, ומכאן המשפט נובע. ■

כעת נוכיח את טענה 2. אלגוריתם העיגול המקרה המוזכר בטענה יהיה מורכב ממספר איטרציות. כך תראה איטרציה אחת:

אלגוריתם RAND-ITER$\left(\left(\hat{y}_j\right)_{j=1}^{k}\right)$

קלט: פתרון חוקי $\left(\hat{y}_j\right)_{j=1}^{n}$ לאילוצים *(6-7)*

- לכל $j \in \{1,\dots,k\}$, באופן בלתי תלוי נגריל
$$x_j^* \leftarrow \begin{cases} 1, & \text{בהסתברות } \hat{y}_j \\ 0, & \text{בהסתברות } 1-\hat{y}_j \end{cases}$$
- נחזיר את הקבוצה המוגדרת ע״י האינדיקטורים הנ״ל: $T^* = \{j \in \{1,\dots,k\} \mid x_j^* = 1\}$.

לפני שנראה את האלגוריתם הסופי, ננסה להבין את גודל הקבוצה המוחזרת ע״י איטרציה אחת, ואת מידת חוקיותה. נתחיל מגודל הקבוצה.

טענה 3: גודל הקבוצה $|T^*|$ בתוחלת הוא בדיוק
$$\mathbb{E}[|T^*|] = \sum_{j=1}^{k} \hat{y}_j$$

הוכחה:
מהגדרת הקבוצה ולינאריות התוחלת, נקבל:
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|T^*|] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{k} x_j^*\right] &= \sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}\left[x_j^*\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k}\left(0 \cdot \Pr\left[x_j^* = 0\right] + 1 \cdot \Pr\left[x_j^* = 1\right]\right) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \Pr\left[x_j^* = 1\right] \\
&= \sum_{j=1}^{k} \hat{y}_j
\end{aligned}$$

■

עכשיו נדון בנושא חוקיות הפלט T^*. איטרציה אחת של האלגוריתם לא בהכרח תחזיר פתרון חוקי לבעיה, אבל עדיין נוכל לנתח את החוקיות באופן מקומי. ספציפית, לכל קבוצה בקלט, נחסום את ההסתברות שהיא אינה ״נדקרת. כלומר, את ההסתברות שהיא לא מכילה אף איבר ב-T^* ובכך מפרה את חוקיותו.

טענה 4: לכל $i \in \{1, \dots, n\}$, ההסתברות שהקבוצה S_i אינה נדקרת חסומה ע״י

$$\Pr[S_i \cap T^* = \emptyset] \le 1/e$$

הוכחה:

לפי הגדרת T^*, המאורע הנ״ל מתרחש אם״ם לכל איבר $j \in S_i$ הגרלנו $x_j^* = 0$. מכיוון שהגרלנו משתנים אלה באופן בלתי תלוי, מתקיים

$$\begin{aligned}
\Pr[S_i \cap T^* = \emptyset] &= \Pr\left[\forall j \in S_i : x_j^* = 0\right] \\
&= \prod_{j \in S_i} \Pr\left[x_j^* = 0\right] \\
&= \prod_{j \in S_i} (1 - \hat{y}_j) \\
&\le \prod_{j \in S_i} \exp(-\hat{y}_j) && \text{כי } \forall \delta : (1 - \delta) \le e^{-\delta} \\
&= \exp\left(-\sum_{j \in S_i} \hat{y}_j\right) \\
&\le \exp(-1) && \text{בגלל אילוץ } (6)
\end{aligned}$$

■

נשים לב כי לכל קבוצה בנפרד יש הסתברות יחסית סבירה להידקר, אך זה לא אומר שיש הסתברות סבירה שכולן יידקרו בו זמנית. (מאותה סיבה שיש הסתברות לא רעה להטיל מטבע ולקבל ״עץ״, אבל ההסתברות להטיל מיליון מטבעות ולקבל ״עץ״ בכולם נמוכה מאוד). כדי להגיע להסתברות יותר גבוהה לקבל פתרון חוקי, נחזור לשיטה שראינו בעבר לאלגוריתמים מקריים אחרים: חזרות. האלגוריתם הסופי מוגדר כך:

אלגוריתם **RAND-ROUND**$\left((\hat{y}_j)_{j=1}^{k}\right)$

קלט: פתרון חוקי $(\hat{y}_j)_{j=1}^{n}$ לאילוצים *(6-7)*

- נריץ $m := 2 \ln n$ פעמים את אלגוריתם **RAND-ITER** על הקלט באופן בלתי תלוי, ונקבל קבוצות $T_1^*, \dots, T_m^*$.
- נגדיר את הפתרון הרצוי להיות איחוד הקבוצות:

$$J^* := \bigcup_{s=1}^{m} T_s^*$$

- נבדוק שמתקיימים שני התנאים המובטחים:
  1. J^* קבוצה דוקרת חוקית.
  2. $|J^*| \le 10 \ln n \cdot \sum_{j=1}^{k} \hat{y}_j$.
- אם התנאים מתקיימים, נחזיר את J^*, ואחרת נדווח על כישלון.

מהגדרת האלגוריתם, ברור שאם מוחזרת קבוצה J^*, אז היא מקיימת את תנאי טענה 2. נותר רק לחסום את ההסתברות שהאלגוריתם נכשל. כלומר, את ההסתברות שלפחות אחד מהתנאים 1,2 באלגוריתם לא מתקיימים. נראה כי מתקיים:

<u>טענה 5</u>: תנאי 1 לא מתקיים בהסתברות לכל היותר $1/n$.

<u>טענה 6</u>: תנאי 2 לא מתקיים בהסתברות לכל היותר $1/5$.

מכאן שההסתברות שלפחות אחד מהתנאים לא מתקיים היא לכל היותר

$$\frac{1}{n}+\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$$

עבור n גדול דיו, וההסתברות ששני התנאים מתקיימים היא לפחות $\frac{3}{4}$.

כעת נוכיח את שתי הטענות.

<u>הוכחת טענה 5</u>:
נתמקד תחילה בקבוצה בודדת S_i. ראינו בטענה 4 כי בכל איטרציה, ההסתברות ש- S_i לא תידקר באותה איטרציה היא לכל היותר $\frac{1}{e}$. מכיוון ש-J^* היא איחוד כל הקבוצות המוחזרות ע״י האיטרציות השונות, S_i לא תידקר ע״י J^* אם״ם היא לא נדקרת באף אחת מהאיטרציות. מכיוון שאלה איטרציות בלתי תלויות, זה קורה בהסתברות

$$\begin{aligned}\Pr[S_i \cap J^* = \emptyset] &= \Pr[\forall s \in \{1,\dots,m\}: S_i \cap T_s^* = \emptyset]\\ &= \prod_{s=1}^{m} \Pr[S_i \cap T_s^* = \emptyset]\\ &\le \exp(-m) = \exp(-2\ln n) = n^{-2}\end{aligned}$$

אם כן, לקבוצה בודדת S_i, ההסתברות שהיא לא תידקר היא לכל היותר $1/n^2$. תנאי 1 לא מתקיים אם״ם ישנה לפחות קבוצה אחת בקלט שלא נדקרת. באמצעות חסם איחוד, ניתן לחסום את ההסתברות שזה קורה ע״י

$$\Pr[\exists i \in \{1,\dots,n\} : S_i \cap J^* = \emptyset] \le \sum_{i=1}^{n} \Pr[S_i \cap J^* = \emptyset] \le n \cdot n^{-2} = 1/n$$

■

<u>הוכחת טענה 6</u>:
לצורך הקיצור, נסמן ב- $\hat{Y} = \sum_{j=1}^{k} \hat{y}_j$ את ערך הפתרון השברי המתקבל קלט. לפי טענה 3, תוחלת גודל כל אחת מהקבוצות T_s^* היא בדיוק $\hat{Y}$. לכן מלינאריות התוחלת והגדרת הקבוצה J^*, תוחלת $|J^*|$ חסומה ע״י

$$\mathbb{E}[|J^*|] = \mathbb{E}\left[\left|\bigcup_{s=1}^{m} T_s^*\right|\right] \le \mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{m}|T_s^*|\right] = \sum_{s=1}^{m}\mathbb{E}|T_s^*| = m\cdot\hat{Y}$$

לפי בחירת מספר האיטרציות $m = 2\ln n$, אנחנו רואים שתנאי 2 לא מתקיים אם״ם גודל הקבוצה J^* גדול מ- $5m\cdot\hat{Y}$. אך לפי החסם הנ״ל, במקרה זה יתקיים $|J^*| > 5\mathbb{E}[|J^*|]$, ולפי אי-שיוויון מרקוב (נשים לב ש-$|J^*|$ משתנה מקרי אי-שלילי), זה קורה בהסתברות לכל היותר $1/5$. ■